

XI REYTANIACKA LIGA ZADANIOWA

III seria (3 grudnia - 22 grudnia 2020)

1. Dla jakich wartości parametru $m \in R$ równanie

$$\cos 2x + \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) = \log_{\frac{1}{3}}(3m + 5) - \log_{\frac{1}{3}}(10 - m)$$

ma rozwiązanie?

2. W trójkąt ABC wpisano okrąg o środku S i promieniu r . Niech h_A, h_B, h_C będą długościami wysokości trójkąta, poprowadzonych z wierzchołków A, B, C (odpowiednio). Wykaż, że $\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}$.
3. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ istnieje punkt F taki, że $|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle FBA| = 15^\circ$. Wykaż, że trójkąt FCD jest równoboczny.
4. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej dodatniej n liczba $5 \cdot 49^{n+1} + 8^n$ jest podzielna przez 41.

Informacja do zadania 4:

Indukcja matematyczna jest własnością liczb naturalnych, służące do dowodzenia twierdzeń matematycznych. Jest to schemat, który można łatwo zrozumieć i zastosować, wykorzystując elementarną wiedzę z matematyki. Dowód twierdzenia za pomocą indukcji matematycznej przeprowadza się w trzech krokach:

- 1) udowodnienie prawdziwości twierdzenia dla pewnej liczby naturalnej n (zazwyczaj dla $n = 1$),
- 2) założenie, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczby naturalnej k , takiej że $k \geq n$,
- 3) udowodnienie prawdziwości twierdzenia dla $k + 1$.

Przykład dowodu przeprowadzonego na podstawie zasady indukcji matematycznej:

Uzasadnij, że $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla wszystkich $n \in N$.

W tym celu wykorzystana zostanie zasada indukcji matematycznej:

- $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ a więc wzór jest prawdziwy dla $n = 1$.
- Zakładamy, że $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ (hipoteza indukcyjna)
- Uzasadnimy, że $1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$.

$$\text{Otóż } 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) \quad (\text{hipoteza ind.})$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

a więc wzór jest prawdziwy dla $n = k + 1$ o ile tylko jest prawdziwy dla $n = k$

Na mocy zasady indukcji matematycznej $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla wszystkich $n \in N$.

Rozwiązania zadań, podpisane imieniem, nazwiskiem i klasą należy dostarczyć do sekretariatu liceum najpóźniej

22 grudnia 2020 (wtorek).

Uczestnikami Ligi mogą być tylko uczniowie VI Liceum Ogólnokształcącego im. T. Reytana.